Wybrane zastosowania pochodnych – obliczanie granic funkcji

W tych materiałach pokażemy, w jaki sposób można obliczać granice, w których otrzymujemy symbole nieoznaczone. Będziemy stosować (w sposób bezpośredni lub pośredni) bardzo poręczną metodę zwaną *regułą de l'Hospitala*.

Wyrażenie nieoznaczone postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***lub*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Twierdzenie 1 (de l'Hospitala).
Jeżeli funkcje f i g są określone w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 oraz spełnione są warunki:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (lub $\pm\infty$),
2) istnieją pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$ dla każdego $x \in S$,
3) $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in S$,
4) istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym

$$(H)\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Powyższe twierdzenie pozostaje również w mocy dla granic w nieskończonościach oraz granic jednostronnych. Literą H będziemy oznaczać fakt stosowania reguły de l'Hospitala.

Przykład 1. Obliczyć granicę funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{2x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-\cos 2x}{x(e^x-1)}$.

Rozwiązanie.

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{2x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0 .$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-\cos 2x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-(-\sin 2x)\cdot 2}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+2\sin 2x}{e^x-1+xe^x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2+2\cos 2x\cdot 2}{e^x+1\cdot e^x+x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2+4\cos 2x}{2e^x+xe^x} = \left[\frac{2+4}{2+0\cdot 1}\right] = 3 .$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci $[0\cdot\infty]$

Wyrażenie nieoznaczone tego typu sprowadzamy do wyrażenia typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ wykonując przekształcenie:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{albo} \qquad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} ,$$

a następnie stosujemy regułę de l'Hospitala.

Jak widać, stosując to przekształcenie trzeba zdecydować, którą funkcję umieścić w liczniku, a którą w mianowniku ułamka. Na ogół w liczniku zapisujemy funkcję, która wydaje nam się bardziej „skomplikowana”.

Przykład 2. Obliczyć granicę funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} x e^{-\frac{2}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{tg} 2x$.

Rozwiązanie.

a) $$\lim_{x\to 0^-} x e^{-\frac{2}{x}} = \left[0\cdot e^{-\frac{2}{0^-}}\right] = \left[0\cdot e^{+\infty}\right] = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}\cdot\left(-x^2\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-2e^{-\frac{2}{x}}\right) = \left[-2e^{+\infty}\right] = [-2\cdot(+\infty)] = -\infty .$$

b) Tutaj (wbrew podanej zasadzie, która sugeruje zapisanie w liczniku funkcji bardziej „skomplikowanej”) w mianowniku umieścimy wyrażenie $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}$.

Dzięki temu będziemy mogli zastosować wzór $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{tg}2x = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\frac{1}{\operatorname{tg}2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\operatorname{ctg}2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci $[\infty-\infty]$

Sposób postępowania z tego typu nieoznaczonością zależy od postaci funkcji, której granicę chcemy obliczyć. Jeżeli przykładowo mamy do czynienia z różnicą dwóch funkcji, z których przynajmniej jedna jest ułamkiem, to całe wyrażenie można zapisać w postaci ułamka – po takim przekształceniu będziemy mieli do czynienia z symbolem $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Czasami wystarczy wspólny czynnik wyciągnąć przed nawias, aby przekształcić wyrażenie typu $[\infty-\infty]$ w wyrażenie $[0\cdot\infty]$.

Przykład 3. Obliczyć granicę funkcji:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}x - x\operatorname{arctg}x\right)$.

Rozwiązanie.

a) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \left[\frac{0}{2}\right] = 0.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}x - x\operatorname{arctg}x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 .$$

Wyrażenia nieoznaczone postaci: $\left[0^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$

W tym przypadku posługujemy się poznanym wcześniej wzorem

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} .$$

Aby obliczyć granicę otrzymanego wyrażenia wystarczy znaleźć granicę wykładnika.

Przykład 4.

a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Rozwiązanie.

a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \left[1^\infty\right] = \lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{1-x}} \overset{(*)}{=} \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, gdzie

$$(*) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 .$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = \left[\infty^0\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x} \overset{(*)}{=} \mathrm{e}^0 = 1$, gdzie

$$(*) \quad \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln\operatorname{ctg} x = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0 .$$

Omówione metody obliczania granic stosujemy często przy wyznaczaniu asymptot wykresów funkcji.

Przykład 5. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}$, b) $f(x) = -2x\,\mathrm{arcctg}\,x$.

Rozwiązanie.

a) Przypominamy, że aby wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji obliczamy granice tej funkcji na krańcach dziedziny. Tutaj dziedziną jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- *Asymptoty pionowe.*

  Ponieważ:

$$\lim_{x\to 0^-} x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \left[0\cdot \mathrm{e}^{\frac{+}{0^-}}\right] = \left[0\cdot \mathrm{e}^{-\infty}\right] = \left[0\cdot 0\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \left[0\cdot \mathrm{e}^{\frac{+}{0^+}}\right] = \left[0\cdot \mathrm{e}^{+\infty}\right] = \left[0\cdot \infty\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 3\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = [3\cdot(+\infty)] = +\infty,$$

  zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną.

- *Asymptoty poziome.*

  Ponieważ:

$$\lim_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \left[-\infty\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{-\infty}}\right] = \left[-\infty\cdot \mathrm{e}^{0}\right] = \left[-\infty\cdot 1\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \left[+\infty\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{+\infty}}\right] = \left[+\infty\cdot \mathrm{e}^{0}\right] = \left[+\infty\cdot 1\right] = +\infty,$$

  to krzywa będąca wykresem naszej funkcji nie posiada asymptot poziomych.

- *Asymptoty ukośne.*

  Ponieważ:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \left[\mathrm{e}^{0}\right] = 1,$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to-\infty}x\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1\right)=$$

$$=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}3\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}=3.$$

zatem prosta $y=x+3$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Analogicznie (obliczając w taki sam sposób odpowiednie granice w $+\infty$) można wykazać, że prosta ta jest również asymptotą ukośną prawostronną, a co za tym idzie jest ona asymptotą ukośną obustronną.

b) Ponieważ dziedziną funkcji $f(x)=-2x\operatorname{arcctg}x$ jest $D_f=\mathbb{R}$, to jej wykres nie posiada asymptot pionowych.

- *Asymptoty poziome.*

  Ponieważ:

  $$\lim_{x\to-\infty}(-2x\operatorname{arcctg}x)=\left[+\infty\cdot\pi\right]=+\infty,$$

  $$\lim_{x\to+\infty}(-2x\operatorname{arcctg}x)=\left[-\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x}{-\frac{1}{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{1+x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x}=-2,$$

  to prosta $y=-2$ jest asymptotą poziomą prawostronną.

- *Asymptoty ukośne.*

  Ponieważ wykres danej funkcji nie posiada asymptoty poziomej lewostronnej, a ma asymptotę poziomą prawostronną, to z asymptot ukośnych może jedynie posiadać asymptotę lewostronną. Obliczamy potrzebne granice:

  $$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\operatorname{arcctg}x}{x}=\lim_{x\to-\infty}(-2\operatorname{arcctg}x)=-2\pi,$$

  $$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x\operatorname{arcctg}x+2\pi x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x\left(\pi - \operatorname{arcctg} x\right) = [-\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi - \operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x}{2x} = -2\,.$$

Zatem prosta $y = -2\pi x - 2$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć granicę funkcji:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{10} - 1024}{x-2}$,

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1-\cos x}$,

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$,

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2+5}$,

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$,

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln\cos x}{1 - e^{2x}}$,

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2 - 2e^{-2x}}$,

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x^2 - \cos 2x}{x(e^x - 1)}$,

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x + \sin x}{\sin x - 2\operatorname{tg} x}$,

10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{arcctg} x - \pi}$,

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$,

12. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - e^x)\operatorname{ctg} x$,

13. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\operatorname{arcctg} x - \pi)$,

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x$,

15. $\lim\limits_{x\to 0} (\pi - 2\arccos x)\cdot \operatorname{ctg} x$,

16. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$,

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$,

19. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{e^x}{\sin x}\right)$,

20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$,

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$,

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$,

24. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

25. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$,

26. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$,

27. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x$,

28. $f(x)=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$,

29. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,

30. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$,

31. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,

32. $f(x)=2x+\mathrm{arcctg}\,x$,

33. $f(x)=x\,\mathrm{arcctg}\,x$,

34. $f(x)=4x\,\mathrm{arctg}\,x$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch